

KONSTRUKTION

IM MASCHINEN- APPARATE- UND GERÄTEBAU

14. Jahrg.

1962

Heft 2

Kraftverteilung am Speichenrad

Von Dr.-Ing. K. Wiedemer, Siegen/Westf.

Die Verteilung der Nabenkraft auf die einzelnen Speichen eines Rades wird theoretisch untersucht. Die Speichenkräfte werden als Streckenlast auf den Radkranz aufgebracht; der Radkranz selbst wird wie ein Biegeträger auf elastischer Unterlage behandelt. Über die Gleichung der elastischen Linie findet man die Verformung des Radkranzes, daraus die Verlängerung der Speichen und schließlich die Speichenkräfte selbst.

Einleitung

Ein Rad mit radialen Speichen und biegeelastischem Radkranz soll durch eine an der Nabe angreifende Last P und durch die am Radkranz angreifende Reaktionskraft beansprucht werden (Bild 1). Durch diese Belastung werden die Kräfte in den unter gleichmäßiger Vorspannung stehenden Speichen vergrößert bzw. verkleinert. Die auftretenden Kraftänderungen (Druckkräfte) dürfen nicht größer sein als die Vorspannung, so daß als Restkraft in jedem Fall noch eine Zugkraft in den Speichen vorhanden ist. Bei einer Festigkeitsberechnung des Speichenrades (Speichenquerschnitt und Widerstandsmoment des Radkranzquerschnittes) müssen zunächst die Speichenkräfte, die mit der Nabenbelastung im Gleichgewicht stehen, ermittelt werden. Wegen der gleichmäßigen Vorspannung der Speichen kann man sich dabei ganz auf die Berechnung der durch die Belastung verursachten Kraftänderungen beschränken. Die Kraftänderung in den Speichen, die im folgenden kurz als Speichenkraft bezeichnet wird, ist die Hauptaufgabe der vorliegenden Untersuchung.

Bezeichnungen

P	Radbelastung	kp
S	Speichenkraft	kp
F	Speichenquerschnitt	cm ²
l	Speichenlänge	cm
r	Radius des Radkranzes	cm
y	Durchbiegung des Radkranzes	cm
J	Trägheitsmoment des Radkranzes	cm ⁴
n	Speichenzahl	
φ	Winkelkoordinate	
h	Bettungsziffer	kp/cm ²
E	Elastizitätsmodul	kp/cm ²
Q	Querkraft	kp
N	Normalkraft	kp
M	Biegemoment	kp cm

Das Speichenrad als statisch unbestimmtes System

Wird die Nabe von nur zwei, nicht in Richtung von P liegenden Speichen gehalten, so sind diese beiden Speichenkräfte statisch bestimmt. Mit jeder weiteren Speiche ist die Bestimmung einer statisch unbestimmten Kraft erforderlich. Bei n Speichen sind daher $n - 2$ statisch unbestimmte Kräfte festzustellen. Darüber hinaus ist der biegeelastische Radkranz als in sich geschlossener Rahmen 3fach statisch unbestimmt (Biegemoment, Querkraft, Normalkraft). Das Speichenrad ist demnach ein $(n + 1)$ -fach statisch unbestimmtes System; die Bestimmung der Speichenkräfte erfordert somit die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit $(n + 3)$ Unbekannten. Die Berechnung der Speichenkräfte verlangt daher bei den üblichen Rädern mit 36 oder gar 42 Speichen einen großen Rechenaufwand. Die vorliegende Arbeit zeigt einen Weg, der wesentlich einfacher zu einer genügend genauen Bestimmung der Speichenkräfte führt.

Der Balken auf nachgiebiger Unterlage

Bei den späteren Ausführungen soll von der in vielen Fällen mit gutem Erfolg angewendeten Winklerschen Hypothese^{1, 2} Gebrauch gemacht werden. Beim geraden Balken auf nachgiebiger Unterlage wird nach dieser Theorie angenommen, daß die Lastintensität q kp/cm proportional zu der Durchbiegung bzw. Eindrückung des Balkens in

¹ Szabó, I.: Einführung in die Techn. Mechanik. 5. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1961.

² Sonntag, R.: Über ein neuzeitliches Festigkeitsproblem des Elektro-Großmaschinenbaues. ETZ 1952, S. 406.

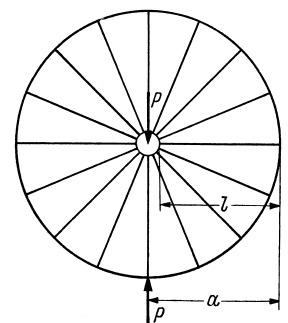


Bild 1. Speichenrad.

seine elastische Unterlage ist. Es gilt daher die Gleichung

$$q = k \cdot y \text{ kp/cm}.$$

q ist die Pressung zwischen Balken und elastischer Bettung. k kp/cm² ist die Bettungsziffer; sie ist nur von den elastischen Eigenschaften des Bettungsmaterials abhängig. Mit dieser Beziehung und mit der Differentialgleichung der elastischen Linie erhält man die bekannte Differentialgleichung für den geraden Balken auf nachgiebiger Unterlage:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -k \cdot y \text{ kp/cm}.$$

Der Balken auf nachgiebiger Unterlage und das Speichenrad

Die Analogie zwischen dem Problem des Balkens auf nachgiebiger Unterlage und dem Speichenrad ist leicht einzusehen, wenn man eine kleine Formänderung des Radkranzes betrachtet (Bild 2). Bei einer radialen Durchbiegung des Radkranzes werden die Speichen gegenüber dem Vorspannungszustand verkürzt bzw. gestreckt; es treten in ihnen Druck- bzw. Zugkräfte auf, die proportional zu der genannten Durchbiegung sind. Ist die Speichenzahl n des Rades sehr groß, so ist es sicher zulässig, daß man die Kraft einer Speiche gleichmäßig auf den Bereich einer Speichenteilung t verteilt. Damit ist auch schon die Vorschrift zur Berechnung der Bettungsziffer gegeben.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Speichenkräfte kontinuierlich über den Radkranz verteilt werden und daß die so entstehende Lastverteilung q proportional zu der örtlichen Durchbiegung gemacht wird. Damit ist die gestellte Aufgabe auf die Lösung des Problems des kreisförmig gekrümmten, in sich geschlossenen Balkens auf nachgiebiger Unterlage zurückgeführt.

Durchführung der Rechnung

Wird eine Speiche um die mit der örtlichen radialen Durchbiegung des Balkens identische Strecke y verkürzt, so entsteht in ihr eine Druckkraft

$$S = \frac{E \cdot F}{l} \cdot y \text{ kp}. \quad (1)$$

Diese Druckkraft S wird auf die Länge einer Teilung

$$t = \frac{2 \pi \cdot a}{n} \text{ cm} \quad (2)$$

verteilt. Man erhält als Reaktionskraft der Speichen auf den Radkranz die Belastungsverteilung

$$q = \frac{S}{t} = \frac{E \cdot F \cdot n}{l \cdot 2 \cdot \pi \cdot a} \cdot y \text{ kp/cm}. \quad (3)$$

Die Größe

$$k = \frac{E \cdot F \cdot n}{2 \pi \cdot a \cdot l} \text{ kp/cm}^2 \quad (4)$$

ist die Bettungsziffer. Mit ihr kann Gl. (3) umgeschrieben werden zu:

$$q = k \cdot y \text{ kp/cm}. \quad (5)$$

Nun soll das Gleichgewicht an einem kleinen Element des Radkranzes untersucht werden. Die in Bild 3 eingezeichneten Pfeile geben die positive Richtung der Kräfte und Momente an.

a) Momentengleichgewicht:

$$dM = Q \cdot a \cdot d\varphi \text{ kpcm} \quad (6)$$

b) Gleichgewicht der radialen Kräfte:

$$dQ = q \cdot a \cdot d\varphi + N \cdot d\varphi \text{ kp} \quad (7)$$

c) Gleichgewicht der tangentialen Kräfte:

$$Q \cdot d\varphi = -dN \text{ kp}. \quad (8)$$

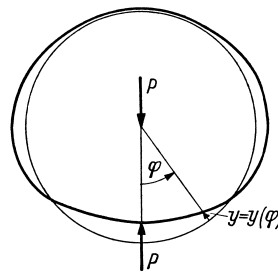


Bild 2. Formänderung am Radkranz.

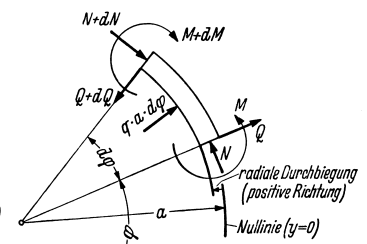


Bild 3. Kräfte an einem Element des Radkranzes.

Für den weiteren Gang der Rechnung wird die Differentialgleichung der elastischen Linie des ursprünglich kreisförmig gebogenen, schwachgekrümmten Stabes benötigt³.

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + y = -\frac{a^2}{E \cdot J} \cdot M(\varphi) \text{ cm}. \quad (9)$$

In die Differentialgleichung (9) werden die Gln. (6), (7) und (8) eingeführt; man erhält schließlich die lineare, homogene Differentialgleichung fünfter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^V + 2 y^{III} + \left(1 + \frac{k \cdot a^4}{E \cdot J}\right) \cdot y' = 0. \quad (10)$$

Der Lösungsansatz $y = e^{r\varphi}$ führt zu der charakteristischen Gleichung

$$r^5 + 2 \cdot r^3 + \left(1 + \frac{k \cdot a^4}{E \cdot J}\right) \cdot r = 0. \quad (11)$$

Das Abspalten der trivialen Lösung $r_5 = 0$ führt auf eine biquadratische Gleichung, deren Nullstellen exakt bestimmbar sind. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{k \cdot a^4}{E \cdot J}} - 1 \right)} \text{ und } \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{k \cdot a^4}{E \cdot J}} + 1 \right)}$$

können die folgenden fünf Nullstellen angegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \alpha + i \beta \\ r_2 &= \alpha - i \beta \\ r_3 &= -\alpha - i \beta \\ r_4 &= -\alpha + i \beta \\ r_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Nach Einsetzen dieser Nullstellen in den Lösungsansatz $y = e^{r\varphi}$ und nach einigen Umformungen findet man schließlich die nachstehende Gleichung der elastischen Linie, wobei $y = a - r$ wieder die radiale Durchbiegung des Radkranzes ist:

$$y = A \cdot e^{\alpha\varphi} \cdot \cos \beta\varphi + B \cdot e^{\alpha\varphi} \cdot \sin \beta\varphi + C \cdot e^{-\alpha\varphi} \cdot \cos \beta\varphi + D \cdot e^{-\alpha\varphi} \cdot \sin \beta\varphi + G \text{ cm}. \quad (13)$$

Die Randbedingungen

Die in Gl. (13) noch unbekannten Koeffizienten A , B , C , D und G müssen jetzt an die Randbedingungen angepaßt werden; zu ihrer Bestimmung sind fünf Randwerte erforderlich. Diese sollen nun zusammengestellt werden.

a) Aus Symmetriegründen muß die erste Ableitung der Gleichung für die Biegelinie an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ verschwinden (Bild 4).

b) Die Querkraft (in Gl. (6)) muß unmittelbar rechts und links vom Angriffspunkt der Kraft P die Größe $P/2$ haben (s. Bild 5). Entsprechend der in Bild 3 festgesetzten Vorzeichenregel hat daher die Querkraft an der Stelle $\varphi = 0$ den Wert $Q = -P/2$. Bei $\varphi = \pi$ kann aus Symmetriegründen keine Querkraft auftreten.

³ Szabó, I.: Höhere Techn. Mechanik (Seite 294). Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1956.

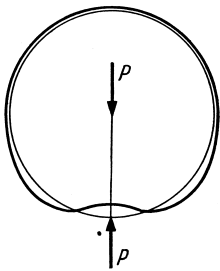


Bild 4. Gestalt des Radkranzes unter Last.

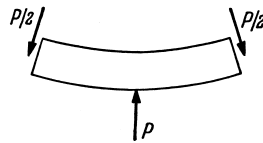


Bild 5. Radelement am Angriffspunkt der Kraft P.

c) Die Tangentialkraft N verursacht eine tangentiale Längenänderung des Radkranzes, die aber als vernachlässigbar klein angesehen werden soll. Diese Annahme führt zu der Bedingung der Längengleichheit, d. h. der Radkranz soll vor und nach der Belastung gleich lang sein. Diese Bedingung wird durch die nachstehende Beziehung erfaßt:

$$\int_0^\pi \sqrt{(a+y)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi - a \cdot \pi = 0.$$

Der Ausdruck $\frac{dy}{d\varphi}$ ist gegenüber $a+y$ in jedem Fall sehr klein; es ist daher zulässig, eine Reihenentwicklung der Wurzel nach dem zweiten Glied abubrechen. Man erhält so die folgende einfache Integralbedingung für die Längengleichheit des Radkranzes:

$$\int_0^\pi y \cdot d\varphi = 0.$$

Auf Grund dieser Überlegungen können die folgenden fünf Randbedingungen angeschrieben werden:

$$\varphi = 0: \quad \frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad (14a)$$

$$\varphi = \pi: \quad \frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad (15a)$$

$$\varphi = 0: \quad Q = -\frac{P}{2} \quad (16a)$$

$$\varphi = \pi: \quad Q = 0 \quad (17a)$$

$$\int_0^\pi y \cdot d\varphi = 0. \quad (18a)$$

Mit den Abkürzungen $\sin \beta \pi = u$ und $\cos \beta \pi = v$ erhält man nach den erforderlichen Zwischenrechnungen das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten A, B, C, D und G :

$$A \cdot \alpha + B \cdot \beta - C \cdot \alpha + D \cdot \beta = 0 \quad (14b)$$

$$A \cdot e^{\alpha\pi} (\alpha v - \beta u) + B \cdot e^{\alpha\pi} (\alpha u + \beta v) + C \cdot e^{-\alpha\pi} (-\alpha v - \beta u) + D \cdot e^{-\alpha\pi} (-\alpha u + \beta v) = 0 \quad (15b)$$

$$A (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + \alpha) + B (3\alpha^2\beta - \beta^3 + \beta) + C (-\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 - \alpha) + D (3\alpha^2\beta - \beta^3 + \beta) = 0 \quad (16b)$$

$$A \cdot e^{\alpha\pi} (\alpha^3 v - 3\alpha^2\beta u - 3\alpha\beta^2 v + \beta^3 u + \alpha v - \beta u) + B \cdot e^{\alpha\pi} (\alpha^3 u + 3\alpha^2\beta v - 3\alpha\beta^2 u - \beta^3 v + \alpha u + \beta v) + C \cdot e^{-\alpha\pi} (-\alpha^3 v - 3\alpha^2\beta u + 3\alpha\beta^2 v + \beta^3 u - \alpha v - \beta u) + D \cdot e^{-\alpha\pi} (-\alpha^3 u + 3\alpha^2\beta v + 3\alpha\beta^2 u - \beta^3 v - \alpha u + \beta v) = 0 \quad (17b)$$

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \{ A [(\alpha v + \beta u) e^{\alpha\pi} - \alpha] + B [(\alpha u - \beta v) e^{\alpha\pi} + \beta] + C [(-\alpha v + \beta u) e^{-\alpha\pi} + \alpha] + D [(-\alpha u - \beta v) e^{-\alpha\pi} + \beta] \} + G \pi = 0. \quad (18b)$$

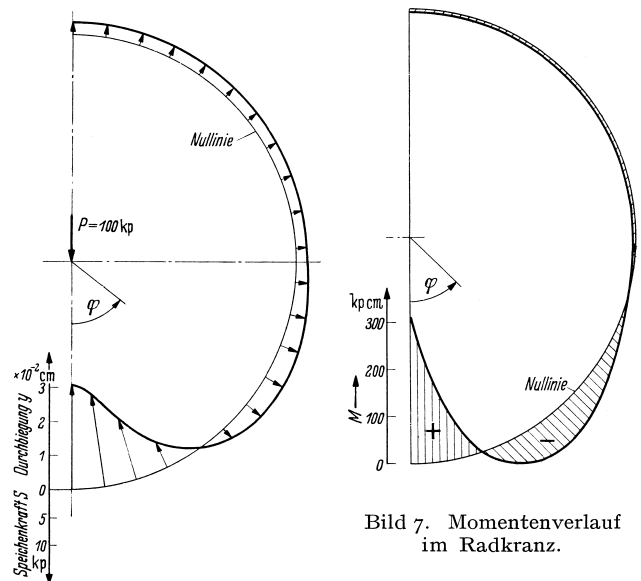


Bild 6. Elastische Linie und Speichenkräfte.

Beispiel

Ein Beispiel soll die durchgeführte Rechnung erweitern und veranschaulichen. Es wird ein Speichenrad mit nachstehenden Abmessungen angenommen:

Radius des Radkranzes	$a = 35 \text{ cm}$
Speichenlänge (Nabenradius gleich Null angenommen)	$l = 35 \text{ cm}$
Speichenquerschnitt	$F = 0,01 \text{ dm}^2$
Trägheitsmoment des Radkranzes	$J = 0,4 \text{ cm}^4$
Speichenzahl	$n = 42$
Elastizitätsmodul	$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$
Radbelastung	$P = 100 \text{ kp.}$

Die entsprechenden Rechenoperationen ergeben folgende Werte:

Bettungsziffer $k = 114 \text{ kp/cm}^2$;
 $\alpha = 2,58$; $\beta = 2,76$.

Die Lösung des Gleichungssystems liefert für die fünf Koeffizienten folgende Werte:

A und B sind vernachlässigbar klein ($< 3,7 \cdot 10^{-9}$)
 $C = 0,0348 \text{ cm}$; $D = 0,0325 \text{ cm}$; $G = -0,0040 \text{ cm}$.

Die Gleichung der elastischen Linie hat damit die Form:

$$y = 0,0348 \cdot e^{-2,58 \cdot \varphi} \cdot \cos(2,76 \varphi) + 0,0325 \cdot e^{-2,58 \varphi} \times \sin(2,76 \varphi) - 0,004 \text{ cm}.$$

Sie gilt im Bereich $0 < \varphi < \pi$ und ist zu $\varphi = 0$ symmetrisch. Die Speichenkräfte werden nach Gl. (1) berechnet.

$$S = -\frac{E \cdot F}{l} \cdot y = -600 \cdot y \quad \text{kp.}$$

Bild 6 zeigt sowohl den Verlauf der elastischen Linie als auch die zugehörigen Speichenkräfte.

Wie schon in der Einleitung gesagt wurde, muß den hier dargestellten Speichenkräften noch eine für alle Speichen gleich große Vorspannungskraft überlagert werden.

Bild 7 zeigt den Verlauf des im Radkranz auftretenden Biegemomentes.

Als Ergebnis kann festgestellt werden, daß bei Berücksichtigung der Vorspannung die unter ca. 60° stehende Speiche der höchsten Zugkraft ausgesetzt ist. Das größte Biegemoment im Radkranz tritt an der Unterstützungsstelle bei $\varphi = 0$ auf.